

I. Απολλώνιος Τυανεύς

Η βιογραφία του Απολλωνίου από τα Τύανα της Καππαδοκίας γράφτηκε από τον Φιλόστρατο κατά παραγγελία της Ιουλίας Δόμνας, που πέθανε το 217, αλλά εκείνος το ολοκλήρωσε το 220-230. Ο γιος της Ιουλίας, ο Καρακάλλας τον λάτρευε, καθώς επίσης και ο μικρανιψιός της, ο Αλέξανδρος Σεβήρος. Ο Φιλόστρατος βασίστηκε σε πηγές που ήταν τότε διαθέσιμες αλλά αργότερα εξαφανίστηκαν: ένα βιβλίο του αυτοκρατορικού γραμματέα Μάξιμου και μια βιογραφία του από τον Μοιραγένη. Σήμερα σώζεται μέσω του Ευσέβιου ένα τμήμα του έργου του περί θυσιών, καθώς και κάποιες επιστολές του. Είχε γράψει και μια εκτεταμένη βιογραφία του Πυθαγόρα.

Ο Φιλόστρατος υποστηρίζει ότι βασίστηκε στο ημερολόγιο του ακολούθου του Απολλωνίου, του Δάμιδος. Τον παρουσιάζει σαν ένα περιπλανώμενο δάσκαλο φιλοσοφίας και μάγο που έδρασε κυρίως στην Ελλάδα και τη Μικρά Ασία αλλά ταξίδεψε επίσης στην Ιταλία, την Ισπανία και τη Βόρειο Αφρική και ακόμη στη Μεσοποταμία, την Ινδία και την Αιθιοπία. Αναφέρεται λεπτομερειακά στην είσοδό του στη Ρώμη αγνοώντας την απαγόρευση του Νέρωνος και αργότερα ήταν κατηγορούμενος επί Δομιτιανού ως εναγόμενος σε συνωμοσία εναντίον του. Το τέλος της ζωής του περιγράφεται ως ουράνια ανάληψη.

Ακολουθούσε την Πυθαγόρεια παράδοση της φυτικής διατροφής προς αποφυγή της θυσίας και του φόνου ζώων.

Ο μελετητής της Βίβλου Bart D. Ehrman στην εισαγωγή του στην έρευνά του για τη Καινή Διαθήκη παραθέτει ένα κομμάτι από τη βιογραφία του Απολλωνίου, χωρίς να αναφέρει από πού είναι και ποιον αφορά. Ο καθένας τον συγγέει κατ' ευθείαν με τον Ιησού:

Ακόμη και πριν τη γέννησή του, ήταν γνωστό ότι επρόκειτο για έναν ιδιαίτερο άνθρωπο. Ένα υπερφυσικό ον πληροφόρησε τη μητέρα του ότι το παιδί που επρόκειτο να κυφορήσει δεν ήταν ένας απλός θνητός αλλά ένα θείο ον. Γεννήθηκε θαυματουργικά και έγινε ένας ασυνήθιστα ανεπτυγμένος πνευματικά για την ηλικία του νεαρός. Ως ενήλικας άφησε το σπίτι του και συνέχισε ως ένας περιπλανώμενος κήρυκας, προτρέποντας τους ακροατές του να ζουν επικεντρωμένοι όχι στα υλικά πράγματα αυτού του κόσμου αλλά σε ό,τι είναι πνευματικό. Μάζεψε ένα αριθμό μαθητών γύρω του, που πείσθηκαν ότι οι διδασκαλίες του ήταν εμπνευσμένες από τον θεό, επειδή ο ίδιος ήταν θείος. Το απέδειξε σ' αυτούς κάνοντας πολλά θαύματα, θεραπεύοντας τους ασθενείς, εκβάλλοντας δαίμονες και ανασταίνοντας νεκρούς. Προς το τέλος της ζωής του έγερνε μεγάλη αντίδραση και οι εχθροί του τον παρέδωσαν στις Ρωμαϊκές αρχές για να δικαστεί. Ακόμη, αφού άφησε αυτόν τον κόσμο, επέστρεψε για να συναντήσει τους μαθητές του για να τους πείσει ότι δεν ήταν πραγματικά νεκρός αλλά ότι ζούσε στο ουράνιο βασίλειο. Αργότερα κάποιοι μαθητές του έγραψαν βιβλία γι' αυτόν.

Ο Λουκιανός ο Σαμοσατεύς έγραψε περί το 180 τον *Αλέξανδρο ή Ψευδόμαντι* όπου σατυρίζει τον **Αλέξανδρο Αβωνοτειχίτη**, της σχολής του Απολλωνίου, που σημαίνει ότι μέχρι τότε είχε πέραση η διδασκαλία του Απολλωνίου. Ο Λουκιανός ήταν οξύς κριτικός τόσο του νεοΠυθαγορισμού όπως φαίνεται έμμεσα από την κριτική του στον Αλέξανδρο

όπως και του Χριστιανισμού όπως φαίνεται από την κριτική του στον **Περεγρίνο**, χριστιανό και κυνικό, στο έργο του *Περεγρίνου τελευτή*.

Όταν ο αυτοκράτορας Αυρηλιανός στο πλαίσιο της στρατιωτικής του εκστρατείας εναντίον της αυτοκρατορίας της Παλμύρας, κατέλαβε τα Τύανα το 272, αλλά, σύμφωνα με την *Historia Augusta* απείχε από την καταστροφή της πόλης, μετά από ένα επιτιμητικό όραμα του Απολλώνιου που τον διέταζε να σώσει τη ζωή των αθών πολιτών.

Τον 3^ο αιώνα ο Πορφύριος ισχυριζόταν στο έργο του 'κατά των χριστιανών' ότι τα θαύματα του Ιησού δεν ήταν μοναδικά εφόσον και ο μη χριστιανός είχε πετύχει παρόμοια πράγματα. Περί το 300 οι Ρωμαϊκές αρχές χρησιμοποίησαν τη φήμη του Απολλώνιου για να εξαλείψουν τον χριστιανισμό. Ο Sossianus Hierocles, Ρωμαίος αριστοκράτης και αξιωματούχος του Διοκλητιανού, τον 3^ο αιώνα ισχυριζόταν ότι τα δόγματα και η ζωή του Απολλώνιου ήταν ανώτερα από αυτά του Ιησού, μια άποψη που επανήλθε κατά τον Διαφωτισμό, ιδίως από τον Βολταίρο. Επίσης υποστήριζε ότι βιογράφοι του Απολλωνίου, ως περισσότερο καλλιεργημένοι, ήταν πολύ πιο αξιόπιστοι από τους αμόρφωτους απόστολους. Η αντίδραση των χριστιανών πατέρων ήταν μεγάλη με επικεφαλής τον Ευσέβιο Καισαρείας και τον Λακτάντιο. Ο Ευσέβιος ισχυρίστηκε ότι ο Φιλόστρατος ήταν μυθολόγος και ότι ο Απολλώνιος ήταν απατεώνας που συνεργαζόταν με δαίμονες. Η διαμάχη αυτή συνέχισε μέχρι τη σύγχρονη εποχή.

II. Μυήσεις και μυστήρια του 2^{ου} αιώνα μέσα από τα μάτια του Λουκιανού

Ο **Αλέξανδρος ο Αβωνοτειχίτης** ή Παφλαγών (π. 105- π.170) ήταν Έλληνας μυστικός και μάντις ιδρυτής της λατρείας του Γλύκωνος, μιας θρησκείας με ευρύτατη διάδοση στη Ρωμαϊκή Αυτοκρατορία. Ο Λουκιανός τον παρουσιάζει ως απατεώνα και τον Γλύκωνα σαν μια κούκλα θεάτρου. Το μίσος του Λουκιανού κατά του Αλεξάνδρου τροφοδοτήθηκε από την απέχθεια του Αλέξανδρου για τους Επικούρειους που ο Λουκιανός εκθειάζε. Ο Αλέξανδρος ήταν ακόλουθος του Απολλώνιου του Τυανέως. Μαθήτευσε στην ιατρική και περί το 150 ίδρυσε ένα μαντείο του Ασκληπιού στην Αβωνότειχο (Ιωνόπολις – Inobolu στον Εύξεινο). Περί το 160 ίδρυσε τη λατρεία του φιδόμορφου θεού Γλύκωνος και πάλι στην Αβωνότειχο. Στα θεμέλια του ναού του Ασκληπιού ισχυρίστηκε ότι γεννήθηκε και πάλι ο Ασκληπιός μέσα από ένα αυγό σαν φίδι. Ένα τέτοιο ήρεμο φίδι με δήθεν ανθρώπινο κεφάλι περιελίσσετο γύρω από τον Αλέξανδρο και εκείνος έδινε χρησμούς σε ερωτήσεις που αφορούσαν πνευματικά, σωματικά ή κοινωνικά ζητήματα. Έδωσε περί τις 80000 απαντήσεις και χρέωνε 1 δραχμή και 2 οβολούς την κάθε απάντηση. Ίδρυσε επίσης μυστήρια παρόμοια με τα Ελευσίνια. Μετά το γάμο της κόρης του με τον Publius Mummius Sisenna Rutilianus, κυβερνήτη της Ρωμαϊκής επαρχίας της Ασίας, απέκτησε μεγάλη πολιτική επιρροή και πίστευαν σε αυτόν πλήθος ανθρώπων από τον Πόντο μέχρι τη Ρώμη. Στη μεγάλη επιδημία του 166 όλοι χρησιμοποιούσαν φυλαχτά με στίχους από τον χρησμό του και τα κρεμούσαν στις πόρτες των σπιτιών τους, ενώ ο Μάρκος Αυρήλιος ζήτησε τον χρησμό του για τη μάχη του με τους Μαρκομάννους, τον οποίο ακολουθώντας οι Ρωμαίοι έχασαν τη μάχη, εκείνος όμως δικαιολογήθηκε λέγοντας ότι τον ερμήνευσαν λάθος. Κύριοι αντίπαλοι του Αλέξανδρου ήταν οι χριστιανοί και οι επικούρειοι. Ο Αλέξανδρος είχε αξιοσημείωτη ομορφιά και την συναρπαστική προσωπικότητα ενός πετυχημένου τσαρλατάνου, άνθρωπος ιδιαίτερων διανοητικών ικανοτήτων και οργανωτικής δύναμης.

Ο **Περεγρίνος** (π.95 -165) από το Πάριον της Αδράστειας της Μυσίας στον Ελλήσποντο. Κυνηγημένος από τον τόπο του για κάποιο φόνο, έφυγε για την Παλαιστίνη, όπου συνάντησε μια χριστιανική κοινότητα και σύντομα απέκτησε μια θέση με κύρος. Εκεί συνελήφθη από τις Ρωμαϊκές αρχές, οπότε υποστηρίχθηκε από την Χριστιανική Εκκλησία. Προσδοκούσε να γίνει μάρτυρας αλλά ο κυβερνήτης της Συρίας τον απελευθέρωσε. Στη συνέχεια έγινε κυνικός, αποκήρυξε την κληρονομιά του και μοίρασε την περιουσία του. Μετά πήγε στην Αίγυπτο όπου μαθήτευσε στον φημισμένο Κυνικό Αγαθόβουλο, διάγοντας υπερβολικά ασκητική ζωή. Αργότερα στη Ρώμη ξεκίνησε μια καμπάνια προσβολών κατά της Ρωμαϊκής εξουσίας και ειδικά κατά του Αντωνίνου. Η ανοχή του καθεστώτος του επέτρεψε να επηρεάσει πολύ τις μάζες και να αποκτήσει σημαντικούς οπαδούς μεταξύ των οποίων και τον Θεαγένη, ένα κυνικό από την Πάτρα. Τελικά εξορίστηκε από τον Δήμαρχο της πόλης. Έφυγε για την Ηλεία όπου συνέχισε την αντιρωμαϊκή πολεμική του. Στους Ολυμπιακούς Αγώνες του 153 ή 157 πρόσβαλε τον πλούσιο ευεργέτη Ηρώδη τον Αττικό, οπότε όλο το πλήθος όρμησε εναντίον του και σώθηκε βρίσκοντας καταφύγιο στο ιερό του Διός. Μετά στην Αθήνα αφιερώθηκε στη μελέτη και την διδασκαλία της φιλοσοφίας, όπου απέκτησε σημαντικό αριθμό μαθητών, μεταξύ των οποίων και τον Αύλος Γέλλιο (Aulus Gellius). Στους Ολυμπιακούς του 161 ανακοίνωσε ότι θα αυτοπυρπολείτο στους επόμενους Ολυμπιακούς, μιμούμενος τον θάνατο του Ηρακλή. Πράγματι στους Ολυμπιακούς του 165 θυσίασε τον εαυτό του σε μια νεκρική πυρά που έστησε ο ίδιος.

Η γελοία εικόνα με την οποία τον παρουσιάζει ο Λουκιανός είναι άκρως αντίθετη των θαυμαστών του, Αύλου Γέλλιου και Αμμιανού Μαρκελλίνου (Ammianus Marcellinus). Ο Αύλος Γέλλιος αναφέρει σχετικά:

Συνήθιζε να λέει ότι ο σοφός άνθρωπος δεν διαπράττει καμία αμαρτία, ακόμη και αν δεν τον έβλεπε κανείς θεός ή άνθρωπος. Γιατί σκέπτεται ότι κάποιος οφείλει να απέχει από την αμαρτία, όχι από τον φόβο της αμαρτίας ή της ντροπής, αλλά από αγάπη για τη δικαιοσύνη και την εντιμότητα και από μια αίσθηση καθήκοντος.

III. Μοδεράτος εκ Γάδης

Ο Μοδεράτος από την Γάδη (Gades, σημερινό Cadiz της Ανδαλουσίας) ήταν νεοΠυθαγόρειος του 1^{ου} αιώνα παράλληλος του Απολλώνιου.

Στην ύστερη αρχαιότητα υπήρχαν δυο διαφορετικοί ορισμοί του αριθμού, οι οποίοι παρουσιάζονται από τον Μοδεράτο:

“Ἔστι δὲ ἀριθμός, ὡς τύπῳ εἰπεῖν, σύστημα μονάδων, ἢ προποδισμός πλήθους ἀπὸ μονάδος ἀρχόμενος καὶ ἀναποδισμός εἰς μονάδα καταλήγων (Stobaeus Eclogae, Wachsmuth and Hense 1884:1.8).

Επηρεασμένος από αυτόν μας δίνει αργότερα και ο Νικόμαχος ο Γερασηνός τον δικό του ορισμό: ἀριθμός ἐστὶ πλῆθος ὠρισμένον ἢ μονάδων σύστημα ἢ ποσότητος χύμα ἐκ μονάδων συγκείμενον. (Αριθμητική Εισαγωγή, 1.7.1).

Στον πρώτο ορισμό του Μοδεράτου, καθώς και στον ορισμό του Νικόμαχου, ο αριθμός είναι μια συλλογή, ένα σύστημα, ένα σύνολο ατομικών μονάδων, όπως ένας αστερισμός από άστρα, ένα κοπάδι από πρόβατα ή ένας σωρός από βότσαλα. Κάτω από αυτή την

οπτική, η μονάδα δεν είναι αριθμός αλλά καλύτερα η μονάδα μετρήσεως ενός πλήθους, ενός συνόλου. Αυτή είναι και η οπτική του Αριστοτέλη, που ορίζει τον αριθμό ως πολλαπλότητα μετρούμενη από την μονάδα. Ο ορισμός του αριθμού ως συλλογής συντονιζόταν με την καθημερινή χρήση και συνεχίζει και στην Ελληνιστική και Βυζαντινή εκπαίδευση, εξ αιτίας σε μεγάλο βαθμό του ορισμού του Ευκλείδη: Μονάς έστιν, καθ' ην έκαστον τῶν ὄντων ἔν λέγεται. Αριθμός δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλήθος (Βιβλίο 7, ορ. 1–2).

Αντίθετα στον δεύτερο ορισμό του Μοδεράτου βλέπουμε μια προβολή και μια πρόοδο από τη μονάδα προς το πλήθος (προποδισμό) και μια επάνοδο και επιστροφή του πλήθους προς τη μονάδα (αναποδισμό). Σε αυτήν την περιγραφή η σύνδεση της μονάδας με το πλήθος γίνεται σε ένα πλαίσιο κίνησης, μετάβασης, αλλαγής, όπου υπονοείται η παραγωγή και η δημιουργία. Ο αριθμός έχει μια αρχή και ένα τέλος, που ταυτίζονται, όντας και τα δυο η μονάδα.

Τόσο ο πρώτος όσο και ο δεύτερος ορισμός ανάγονται σαφώς στον Πλάτωνα, και συγκεκριμένα στον Πλατωνικό Παρμενίδη, όπου φαίνεται με τον πιο σαφή τρόπο η τεράστια Πυθαγόρεια επίδραση πάνω του.

Πιο συγκεκριμένα όσον αφορά τον πρώτο ορισμό, ο Πλάτων περιγράφει τη δυάδα ως σύνολο δυο μονάδων (ὡ δ' ἂν δύο ἦτον, ἔστι τις μηχανή μὴ οὐχ ἑκάτερον αὐτοῖν ἔν εἶναι;) εν συνέχεια το τρία ως σύνθεση της δυάδας με τη μονάδα (εἰ δὲ ἔν ἑκάστον αὐτῶν ἔστι, συντεθέντος ἑνὸς ὁποιοουῶν ἠτινιοῦν συζυγία οὐ τρία γίνεταί τὰ πάντα;) αποτελώντας τον πρώτο ἄρτιο και τον πρώτο περιττό, και τους υπόλοιπους αριθμούς από την επανάληψη ἀρτίων ἀρτίες φορές ἢ περιττῆς φορές ἢ περιττῶν ἀρτίες φορές ἢ περιττῆς φορές (ἄρτια τε ἄρα ἀρτιάκις ἂν εἶη καὶ περιττὰ περιττάκις καὶ ἄρτια περιττάκις καὶ περιττὰ ἀρτιάκις). [Πλατ. Παρμ. 143d-144a].

Όσον δε αφορά τον δεύτερο ορισμό, ο Πλάτων αναφέρει ότι το ένα για να υπάρχει δεν μπορεί παρά να μετέχει στον χρόνο, οι μεγαλύτεροι μάλιστα αριθμοί είναι μεταγενέστεροι των μικρότερων, με μικρότερο όλων ἄρα και προγενέστερο όλων το ένα. Από την άλλη βέβαια εφόσον το όλον αποτελείται από διάφορα μέρη, που μπορούν να θεωρηθούν ως αριθμοί, η ολοκλήρωση των οποίων εμφανίζει το πλήρες ένα. Με αυτή την έννοια το ένα είναι μεταγενέστερο και ὑστερο (ἀριθμοῦ φήσομεν τὰ πλείω γίνεσθαι τε καὶ γεγονέναι πρότερον, ἢ τὰ ἐλάττω; τὰ ἐλάττω. τὸ ὀλίγιστον ἄρα πρῶτον: τοῦτο δ' ἔστι τὸ ἔν. ἢ γάρ; ναί. πάντων ἄρα τὸ ἔν πρῶτον γέγονε τῶν ἀριθμὸν ἔχόντων. καὶ οὕτως ἂν εἶη τᾶλλα νεώτερα τοῦ ἑνός, τὸ δὲ ἔν πρεσβύτερον τῶν ἄλλων. ... καὶ μὴν μόριά γε φήσομεν ταῦτ' εἶναι πάντα τᾶλλα τοῦ ὅλου τε καὶ ἑνός, αὐτὸ δὲ ἐκεῖνο ἅμα τῇ τελευτῇ γεγονέναι ἔν τε καὶ ὅλον. φήσομεν γάρ. τελευτῇ δὲ γε οἴμαι ὑστατον γίνεταί, τούτῳ δ' ἅμα τὸ ἔν πέφυκε γίνεσθαι: ὥστ' εἶπερ ἀνάγκη αὐτὸ τὸ ἔν μὴ παρὰ φύσιν γίνεσθαι, ἅμα τελευτῇ ἂν γεγονὸς ὑστατον ἂν τῶν ἄλλων πεφυκὸς εἶη γίνεσθαι. φαίνεται. νεώτερον ἄρα τῶν ἄλλων τὸ ἔν ἔστι, τὰ δ' ἄλλα τοῦ ἑνός πρεσβύτερα. οὕτως αὖ μοι φαίνεται.) [Πλατ. Παρμ. 153a-153d]

IV. Νικόμαχος ο Γερασηνός

Ο Νικόμαχος από τα Γέρασα (σημερινό Jerash της Ιορδανίας) (π.60 – π.120) ήταν από τους σημαντικότερους μαθηματικούς της αρχαιότητας. Έχουν μείνει αποσπάσματα από τα έργα

του: *Αριθμητική Εισαγωγή* και *Εγχειρίδιον Αρμονικής*. Ως Πυθαγόρειος ενδιαφερόταν περισσότερο για τη μυστική σημασία παρά για την πρακτική χρήση των αριθμών. Εστιαζόμενος στους φυσικούς αριθμούς και κυρίως τους πρώτους και τους τέλειους (ή πλήρεις) αριθμούς θεωρούσε την αριθμητική οντολογικά πρότερη των υπόλοιπων μαθηματικών κλάδων (γεωμετρίας, αστρονομίας και μουσικής). Στο *Εγχειρίδιον Αρμονικής* παρουσιάζεται αν και Πυθαγόρειος υπέρμαχος και του Αριστοξένιου δόγματος του ακούσματος. Επίσης μιλά για τη μουσική των σφαιρών ως συνδέσμος μεταξύ μουσικής και αρχιτεκτονικής του Σύμπαντος.

V. Νουμήνιος Απαμείας

Ο Νουμήνιος Απαμείας (2^ο μισό του 2^{ου} αιώνα) θεωρείται από τους βασικούς νεοΠυθαγόρειους και πρόδρομος του νεοΠλατωνισμού. Ήταν κατά βάση Πλατωνιστής, σε απόσταση όμως από τον σκεπτικισμό στον οποίο είχε οδηγηθεί η Ακαδημία πριν τους νεοΠλατωνικούς και επίσης εις βάθος συγκρητιστής. Θεωρούσε ως την καθαρή πηγή της αλήθειας τον Πυθαγόρα και πιο πίσω τους Ορφικούς. Ο Πλάτων ήταν κατά τη γνώμη του ο γνήσιος συνεχιστής του Πυθαγόρα, συγκρινόνοντας τις αλήθειες του Πυθαγόρα με αυτές του Σωκράτη, αλλά ήταν λάθος η τότε εικόνα και ερμηνεία των Πλατωνικών ιδεών αναμειγμένη με Αριστοτελικές και Στωικές ιδέες και επιχείρησε στα έργα και σχόλια του να αποκαθάρει τον Πλατωνικό λόγο από αυτές τις επιδράσεις. Εύρισκε εν τούτοις συγγένεια του Πυθαγορισμού-Πλατωνισμού με την Μωσαϊκή παράδοση των Ιουδαίων, τους Βραχμάνους, τους Βαβυλώνιους Μάγους και τους Αιγυπτίους. Θεωρούσε τον Πλάτωνα και τον Μωυσή ως πολύ συγγενείς ως προς την αντίληψη του θείου καθώς και οι δυο θεωρούσαν τον θεό ως το Ον.

Οι βασικές του θέσεις ήταν ότι η πραγματική ύπαρξη ταυτίζεται με τον πρώτο θεό που υπάρχει αφ' εαυτού και ταυτίζεται με το Αγαθό και τον Νου. Κατά τη γνώμη του όμως ο πρώτος θεός δεν έχει κανένα κίνητρο για δημιουργία, δεν είναι δημιουργός. Εισάγει λοιπόν την έννοια ενός δεύτερου θεού, του Δημιουργού, στον οποίο μεταδίδει τις ιδέες του ο πρώτος θεός και επίσης την ανάγκη για δημιουργία. Θεωρούσε επίσης το σώμα ως φυλακή της ψυχής, όπως και οι Ορφικοί και ο Πλάτων.

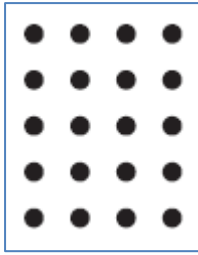
Το έργο του, όπως πληροφορούμεθα από τον Πρόκλο, έχαιρε υψηλής εκτίμησης από τους νεοΠλατωνικούς, ιδίως από τον Αμέλιο τον μαθητή του Πλωτίνου, που έγραψε μάλιστα σχόλια στα έργα του.

VII. Βασικά μαθηματικά θεωρήματα στους Νικόμαχο Γερασηνό και Θέωνα Σμυρναίο

Μια μεγάλη κατηγορία αριθμών, οι λεγόμενοι *πολυγωνικοί* περιγράφονται στα κείμενα των Πυθαγορείων. Στην γενικότερη αυτή κατηγορία εντάσσονται οι λεγόμενοι ορθογώνιοι, τριγωνικοί, τετραγωνικοί, πενταγωνικοί κλπ.

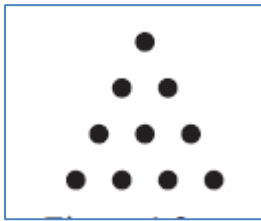
Ορθογώνιος (oblong) ονομάζεται ο αριθμός πλήθος των σημείων που καλύπτουν ένα ορθογώνιο πίνακα n στηλών και $(n+1)$ γραμμών.

$$o_n = 2+4+6+\dots+2n = 2(1+2+3+\dots+n) = 2n(n+1)/2 = n(n+1)$$



Τριγωνικός (*triangular*) ονομάζεται ο αριθμός πλήθος των σημείων που καλύπτουν ένα ισόπλευρο τρίγωνο n σημείων.

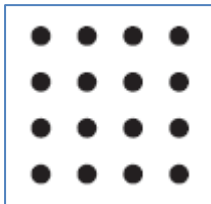
$$t_n = 1+2+3+\dots+n = n(n+1)/2$$



Προφανώς $s_n=2t_n$

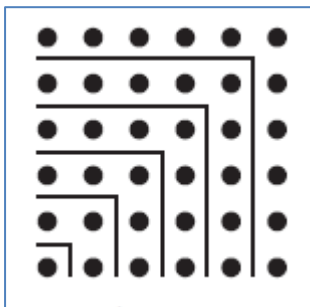
Τετραγωνικός (*square*) ονομάζεται ο αριθμός πλήθος των σημείων που καλύπτουν ένα τετράγωνο n στηλών και n γραμμών.

$$s_n=n^2$$



Οι Πυθαγόρειοι ανακάλυψαν ότι το τετράγωνο ενός αριθμού n ισούται με το άθροισμα των n πρώτων περιττών αριθμών

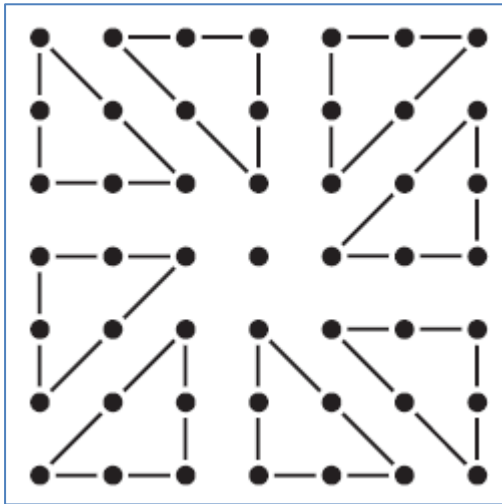
$$n^2=1+3+5+\dots+(2n-1)$$



Ο Fibonacci το 1225 δίνει στο βιβλίο του *Liber quadratorum* τον παραπάνω τύπο των Πυθαγορείων.

Μια άλλη ιδιότητα που συνδέει τετραγωνικούς και τριγωνικούς αριθμούς γνωστή στους πρώτους Πυθαγορείους παρουσιάστηκε από τον Πλούταρχο στο έργο του *Πλατωνικά Ερωτήματα*. Με σημερινή σημειογραφία:

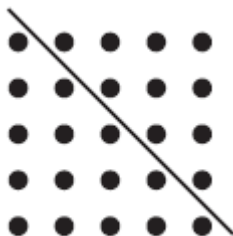
$$s_{2n+1} = (2n+1)^2 = 8t_n + 1 = 8n(n+1)/2 + 1$$



Οι όροι πολυγωνικός, ορθογώνιος, τριγωνικός, τετραγωνικός, πενταγωνικός αριθμός κλπ εισάγονται από τον **Υψικλή** τον 2^ο αιώνα π.Χ., συγγραφέα του *Βιβλίου XIV*, συμπλήρωμα στο *Βιβλίο XIII* των *Στοιχείων του Ευκλείδη*.

Τα σημαντικότερα έργα Αριθμητικής που σώζονται από τον 2^ο αιώνα είναι η προαναφερθείσα *Αριθμητική Εισαγωγή* του Νικομάχου και το έργο *Τα κατά μαθηματικόν χρήσιμα εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν* του Θέωνος Σμυρναίου. Και οι δυο συγγραφείς αναφέρουν τον τύπο, ότι κάθε τετραγωνικός αριθμός ισούται με το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών, της ίδιας τάξης και της προηγούμενης:

$$s_n = t_n + t_{n-1}$$



Ο Νικόμαχος σημειώνει ότι αν γραφούν εναλλακτικά οι τετραγωνικοί και οι ορθογώνιοι αριθμοί και συνδυαστούν κατά ζεύγη, τότε προκύπτουν οι τριγωνικοί αριθμοί.

Μάρκος Ν. Δενδρινός: Πυθαγόρεια και Καββαλιστική Αριθμοσοφία
Περί των Νεοπυθαγορείων με έμφαση στον Νικόμαχο Γερασηνό

s_1	o_1	s_2	o_2	s_3	o_3	s_4	o_4	s_5	o_5
1	2	4	6	9	12	16	20	25	30
	3	6	10	15	21	28	36	45	55
	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}

Η παραπάνω έκφραση του Νικομάχου σε σύγχρονη σημειολογία:

$$t_{2n} = s_n + o_n \text{ και } t_{2n+1} = s_{n+1} + o_n.$$

Από αυτά εξάγει 2 ακόμη τύπους, για τη σχέση τετραγωνικών και ορθογώνιων αριθμών (απαλείφοντας τους τριγωνικούς):

$$s_n + s_{n+1} + 2o_n = s_{2n+1} \text{ και } o_{n-1} + o_n + 2s_n = s_{2n}.$$

Ο Νικόμαχος επεκτείνει τη θεωρία του για τους τετραγωνικούς αριθμούς σε υψηλότερες διαστάσεις, μιλώντας στη συνέχεια για τους κυβικούς αριθμούς, δίνοντας ένα τύπο για τον κυβικό αριθμό ως αθροίσματος κάθε γραμμής ενός τριγώνου, όπου βρίσκονται διατεταγμένοι οι περιττοί αριθμοί.

1	1
3 5	8
7 9 11	27
13 15 17 19	64
21 23 25 27 29	125

Στην *Αριθμητική Εισαγωγή* του ο Νικόμαχος συζητά επίσης για τις ιδιότητες της αριθμητικής, της γεωμετρικής και της αρμονικής προόδου. Όσον αφορά την αριθμητική πρόοδο τριών φυσικών αριθμών: $a-k$, a , $a+k$, παρατηρεί ότι το γινόμενο των ακραίων διαφέρει από το τετράγωνο του μεσαίου κατά το τετράγωνο της κοινής τους διαφοράς:

$$(a-k)(a+k) + k^2 = a^2.$$

Κατά τον Μεσαίωνα, οι κανόνες πολλαπλασιασμού δυο αριθμών ήταν πολύπλοκοι.

Ο παραπάνω κανόνας του Νικομάχου χρησιμοποιείτο για την εύρεση του τετραγώνου ενός αριθμού, κοντά σε δεκάδα, εκατοντάδα ή χιλιάδα, πχ. $98^2 = (98-2)(98+2)+2^2 = 9604$.



Μετά από τους ορθογώνιους, τους τριγωνικούς και τους τετράγωνους αριθμούς ο Νικόμαχος και ο Θέων ασχολούνται με τους πενταγωνικούς και εξαγωνικούς αριθμούς. Οι πενταγωνικοί αριθμοί 1, 5, 12, 22, ..., p_n^5 , ... είναι ίσοι με τους πλήθος των σημείων για να γεμίσουν πεντάγωνα με πενταγωνικές διατάξεις.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Triangular	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Square	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Pentagonal	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
Hexagonal	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
Heptagonal	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235
Octagonal	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280
Enneagonal	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325
Decagonal	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370

Από τον παραπάνω πίνακα ο Νικόμαχος συμπεραίνει ότι το άθροισμα του n -τετραγωνικού και του $(n-1)$ -τριγωνικού ισούται με τον n -πενταγωνικό:

$$p_n^5 = s_n + t_{n-1}$$

Για παράδειγμα για $n=6$:

$$p_6^5 = s_6 + t_5 \text{ ή } p_6^5 = 36 + 15 = 51$$

Επίσης συμπεραίνει ότι το 3πλάσιο του $(n-1)$ -τριγωνικού συν n ισούται με τον n -πενταγωνικό:

$$p_n^5 = 3 t_{n-1} + n$$

Για παράδειγμα για $n=9$:

$$p_9^5 = 3 t_8 + 9 = 3 \cdot 36 + 9 = 117$$

Αλλά η μεγάλη ανακάλυψη σχετικά με τους πολυγωνικούς αριθμούς δίνεται στο τέλος από τον Νικόμαχο υπό τη γενική αναδρομική (recursive) μορφή:

$$p_n^m + p_{n-1}^3 = p_n^{m+1}$$

Η πρώτη μετάφραση της *Αριθμητικής Εισαγωγής* έγινε από τον Απουλήιο από τα Μάδαυρα μετά από τον θάνατο του Νικομάχου αλλά χάθηκε.

Υπήρξαν όπως πολυάριθμα σχόλια στην *Εισαγωγή*, το σημαντικότερο των οποίων ήταν του νεοπλατωνικού Ιάμβλιχου του Σύριου. Ο ισλαμικός κόσμος γνώρισε τον Νικόμαχο από τα αποσπάσματα των 2 βιβλίων του Νικομάχου από τον Thabit ibn. Ο Thabit ήταν μαθηματικός, γιατρός και φιλόσοφος του 9^{ου} αιώνα που έδρασε στον Οίκο της Σοφίας στη Βαγδάτη.

Μια άλλη εκδοχή της *Εισαγωγής* γράφτηκε από τον Βοήθιο. Το έργο αυτού στα λατινικά ήταν το βασικό κείμενο μέσω του οποίου οι Ρωμαίοι και οι άνθρωποι του Μεσαίωνα γνώρισαν την ελληνική Αριθμητική.

Τον 4ο αιώνα (π.Χ.) ο Φίλιππος ο Οπούντιος και ο Σπεύσιππος έγραψαν επίσης πραγματείες για τους πολυγωνικούς αριθμούς που δεν επέζησαν. Αυτοί οι δυο ήταν εκείνοι που επέκτειναν τους *τριγωνικούς* αριθμούς στους *τετραεδρικούς* αριθμούς (από το επίπεδο στον χώρο).

Ο τετραεδρικός αριθμός τάξης n (P_n^3) σχηματίζεται ως το άθροισμα των διαδοχικών τριγωνικών αριθμών μέχρι και την τάξη n :

$$P_n^3 = p_1^3 + p_2^3 + \dots + p_n^3$$

Για παράδειγμα:

$$P_4^3 = 1 + 3 + 6 + 10 = 20$$

Οπότε οι 4 πρώτοι τετραεδρικοί (τάξης 4) αριθμοί είναι: 1, 4, 10, and 20.

Ένας Αιγυπτιακός πάπυρος του 300 (π.Χ.) δίνει τον τύπο για το P_n^3 :

$$P_n^3 = n(n+1)(n+2)(n+6)$$

Ο τύπος για το P_n^3 ανακαλύφθηκε και από τον Ινδό μαθηματικό και αστρονόμο Aryabhata, που είχε επίσης υπολογίσει ένα από τους πιο πρώιμους πίνακες ημιτόνων, χρησιμοποιώντας την τιμή 3.146 ως εκτίμηση για το π .

VIII. Πυθαγόρει Αριθμοσοφία

α β γ δ ε ζ η θ

1 2 3 4 5 6 7 8 9

ι κ λ μ ν ξ ο π Ϟ

10 20 30 40 50 60 70 80 90

ρ σ τ υ φ χ ψ ω ξ

100 200 300 400 500 600 700 800 900

,α

1000

Για παράδειγμα πνεύμα=576 και αετός=576, Ιησούς = 888 (η υπέρβαση του 666)

Αδάμ = 46, Εύα = 406

ΙΧ. Εβραϊκή Αριθμοσοφία

Decimal	Hebrew	Glyph	Decimal	Hebrew	Glyph	Decimal	Hebrew	Glyph
1	<i>Aleph</i>	א	10	<i>Yud</i>	י	100	<i>Koof</i>	ק
2	<i>Bet</i>	ב	20	<i>Kaf</i>	כ	200	<i>Reish</i>	ר
3	<i>Gimel</i>	ג	30	<i>Lamed</i>	ל	300	<i>Shin</i>	ש
4	<i>Daleth</i>	ד	40	<i>Mem</i>	מ	400	<i>Taf</i>	ת
5	<i>Heh</i>	ה	50	<i>Nun</i>	נ	500	<i>Kaf(final)</i>	ך
6	<i>Vav</i>	ו	60	<i>Samech</i>	ס	600	<i>Mem(final)</i>	ם
7	<i>Zayin</i>	ז	70	<i>Ayin</i>	ע	700	<i>Nun(final)</i>	ן
8	<i>Het</i>	ח	80	<i>Peh</i>	פ	800	<i>Peh(final)</i>	ף
9	<i>Tet</i>	ט	90	<i>Tzady</i>	צ	900	<i>Tzady(final)</i>	ץ

Τρόποι αντιστοίχισης γραμμάτων και αριθμών

Mispar Hechrachi (απόλυτη τιμή): κάθε γράμμα με την αριθμητική του αξία 1-22

Mispar Gadol: σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα

Mispar ha-Gadol: κάθε γράμμα με τον αριθμό που προκύπτει αν βρούμε το αριθμοσοφικό αντίστοιχο ολόκληρου του ονόματος του γράμματος

Mispar Kidmi (τριγωνική τιμή): κάθε γράμμα με το άθροισμα των τιμών όλων των γραμμάτων μέχρι τη θέση αυτού στην αλφάβητο, Aleph = 1, Bet = 1 + 2 = 3, Gimel = 1+2+3=6, κλπ. etc.

Mispar ha-Akhor: κάθε γράμμα με την τιμή του πολλαπλασιασμένη με τη θέση του γράμματος στη λέξη είτε σε αύξουσα είτε σε φθίνουσα τάξη. Η μέθοδος αυτή είναι πολύ ενδιαφέρουσα καθώς λαμβάνει υπόψη και τη θέση του γράμματος εντός της λέξης

Τρόποι αντικατάστασης γραμμάτων από άλλα

Atbash: αντικατάσταση κάθε γράμματος της λέξης με το αντίθετό του στην αλφάβητο, δηλ. το πρώτο γράμμα (Aleph) με το τελευταίο (Tav), το δεύτερο (Bet) με το προτελευταίο (Shin), κλπ. Το αποτέλεσμα μπορεί να ερμηνευτεί ως ένα κρυφό μήνυμα, όπως στον Ιερεμία 25:26, 51:41, όπου το όνομα ηשש ("Sheshek") αναπαριστά το לבב (Babylon).

Albam: η αλφάβητος διαιρείται σε 2 στήλες, 11 γράμματα το καθένα. Το πρώτο γράμμα της πρώτης στήλης αντικαθίσταται από το πρώτο της δεύτερης στήλης κλπ

Achbi: η αλφάβητος διαιρείται σε 2 στήλες, 11 γράμματα το καθένα. Το πρώτο γράμμα της πρώτης στήλης αντικαθίσταται από το τελευταίο της πρώτης στήλης, το 2^ο από το 10^ο, κλπ

Κάποιοι προτείνουν 231 μεθόδους αντικατάστασης, όσες και οι μυστικές Πύλες του Sefer Yetzirah.

Χ. Χριστιανική αριθμοσοφία

Επιστολή Βαρνάβα. 9:8

λέγει γάρ· Καὶ περιέτεμεν Ἀβραάμ ἐκ τοῦ οἴκου αὐτοῦ ἄνδρας δεκαοκτῶ καὶ τριακοσίους· τίς οὖν ἡ δοθεῖσα αὐτῷ γυνῶσις; μάθετε, ὅτι τοὺς δεκαοκτῶ πρώτους, καὶ διάστημα ποιήσας λέγει τριακοσίους· τὸ δεκαοκτῶ ἰ' δέκα, ἡ' ὀκτώ· ἔχεις Ἰησοῦν· ὅτι δὲ ὁ σταυρὸς ἐν τῷ ταῦ ἤμελλεν ἔχειν τὴν χάριν, λέγει καὶ τοὺς τριακοσίους· δηλοῖ οὖν τὸν μὲν Ἰησοῦν ἐν τοῖς δυσὶν γράμμασιν, καὶ ἐν τῷ ἐνὶ τὸν σταυρόν

I:10

H:8

Σύνολο18

Σταυρὸς T:300

Βιβλιογραφία

JAMES J. TATTERSALL, Elementary number theory in nine chapters,

<https://www.fmf.uni-lj.si/~lavric/Tattersall%20-%20Elementary%20number%20theory%20in%20nine%20chapters.pdf>